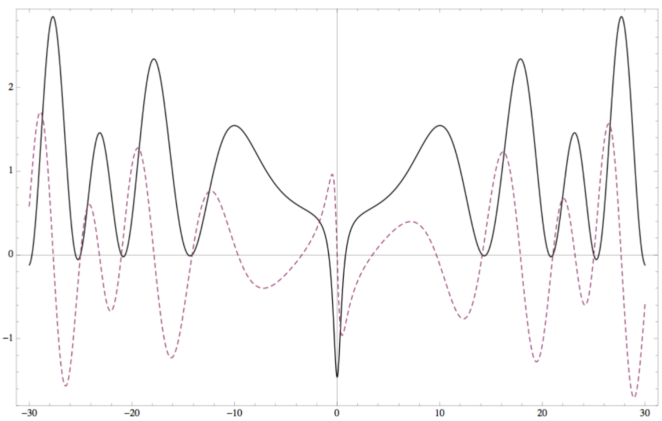

16. La mágica fórmula analítica de $\pi(x)$

Solamente los infinitos ceros no triviales de la función $\zeta(s)$ de Riemann saben donde están los infinitos números primos.

José Luis Pérez (Barcelona, 1957).
(Esta vez la cita es mía, con perdón.)

1. **En este capítulo vamos a conocer la fórmula analítica** que encontró Riemann para $\pi(x)$ en su artículo de 1859. Este era el final de su trabajo. Un final, sí, aunque quedaron muchas preguntas sin respuesta, como veremos en lo que queda de este libro.

Le adelanto a los lectores que, en la última parte de su artículo, Riemann usó unas matemáticas verdaderamente complicadas. Mucho más de lo visto hasta ahora, sabiendo, además, que ya he omitido bastantes desarrollos por su complejidad, sustituyéndolos por exposiciones más bien literarias. Por ello, y para hacer las cosas comprensibles, tendré que exponer conclusiones acabadas, para las que los lectores deberán tener fe, pues me saltaré muchos pasos.

2. Adaptación de $J(x)$. Lo primero es volver a la función $J(x)$, y hacer en ella un sutil cambio. En la figura 16-1 vuelvo a presentarla, y la dibujo desde $x = 0$ hasta $x = 34$. Fijarse que, en los puntos donde la función tiene un salto, he dibujado además una marca, que cae exactamente en la mitad de ese salto.

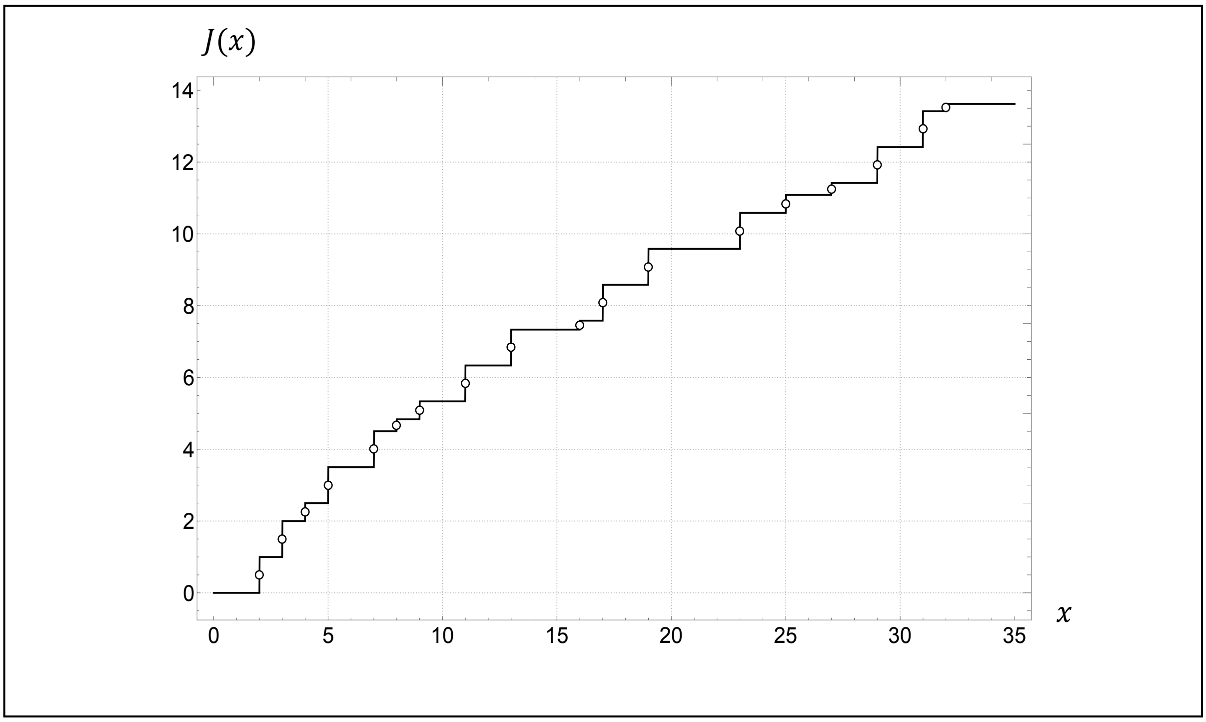

Figura 16-1

¿Qué quiero significar con ello? Pues que la función $J(x)$ valdrá, en cada salto, la media de su valor anterior y de su valor posterior. Por ejemplo, $J(10{,}99) = 5{,}33333\ldots$, y $J(11{,}01) = 6{,}33333\ldots$, por lo que, justo en el salto, hago que $J(11) = 5{,}83333$ ... ¿Y por qué hago esto? Pues porque hace falta para que las matemáticas que veremos a partir de ahora funcionen. Es un pequeño cambio que no desvirtúa la naturaleza de $J(x)$.

¿Cómo escribir matemáticamente este pequeño cambio? Pues volviendo a la definición original de $J(x)$, vista en la expresión 15-1 del anterior capítulo, a base de contar primos y potencias de primos ponderadas. De la siguiente manera:

$$J(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{p^n<x}\frac{1}{n} + \sum_{p^n\leq x}\frac{1}{n}\right)$$

En esta expresión se hace patente el hecho de que, a la izquierda del salto, se cuentan primos y potencias de primos hasta $p^n < x$, mientras que, a la derecha, se cuentan hasta $p^n \leq x$. La suma de ambas cantidades, dividida por dos, nos da el valor de $J(x)$ justo en el salto. Más adelante comentaré por qué ha hecho falta este ligero cambio.

3. La fórmula analítica para $J(x)$. Partamos de dos importantes resultados vistos en el último capítulo, que involucran a la función $\xi(s)$:

$$\xi(s) = \pi^{-s/2}(s-1)\Gamma(s/2+1)\zeta(s) \quad \text{y} \quad \xi(s) = \xi(0)\prod_{\rho}\left(1-\frac{s}{\rho}\right)$$

Puedo sacar logaritmos en ambas expresiones, y obtengo las dos siguientes:

$$\log\xi(s) = -\frac{s}{2}\log\pi + \log(s-1) + \log\Gamma(s/2+1) + \log\zeta(s)$$

$$\log \xi(s) = \log \xi(0) + \sum_{\rho} \log\left(1 - \frac{s}{\rho}\right)$$

pues el logaritmo de los productos se ha convertido en sumas de logaritmos.

Ahora igualo las dos expresiones de $\log \xi(s)$:

$$-\frac{s}{2}\log \pi + \log(s-1) + \log \Gamma(s/2+1) + \log \zeta(s)$$

$$= \log \xi(0) + \sum_{\rho} \log\left(1 - \frac{s}{\rho}\right)$$

y despejo $\log \zeta(s)$, que es lo que nos interesa:

$$\log \zeta(s) = \log \xi(0) + \sum_{\rho} \log\left(1 - \frac{s}{\rho}\right) + \frac{s}{2}\log \pi - \log\,(s-1)$$

$$-\log \Gamma(s/2+1)$$

¿Qué nos dice esta expresión? Pues que $\log \zeta(s)$ depende de cinco términos. El primero es una constante que vale $\log \xi(0) = \log(1/2) = -0{,}693147$, con 6 decimales. El segundo término es curioso: involucra, mediante una suma infinita, a todos los ceros no triviales de $\zeta(s)$. Veremos que esto trae importantes consecuencias. Los tres últimos términos tienen cada uno una dependencia diferente de s, que resulta clara, pues ya conocemos las funciones de las que dependen.

Ahora es el momento de volver a la expresión para $\log \zeta(s)$, vista en la expresión 15-6 del anterior capítulo:

$$\frac{\log \zeta(s)}{s} = \int_{x=0}^{\infty} J(x) \cdot x^{-s-1}\,dx$$

Y llegamos a la hora de la verdad: Riemann, mediante un aparato matemático que cae fuera del alcance de este libro (análisis de Fourier), logró *despejar* de la anterior expresión la función $J(x)$, y la escribió en términos de una integral en la que aparecía $\log \zeta(s)$. Cuando digo *despejar*, lo pongo en cursiva, claro, pues no se trata de un vulgar despeje, sino de una operación complicada, con muchas derivadas e integrales de variable compleja. Riemann, simbólicamente, consiguió hacer lo siguiente:

$$J(x) = \text{función}\left(\int \log \zeta(s)\right)$$

Y como acabamos de ver que $\log \zeta(s)$ se compone de cinco términos, resulta que también $J(x)$ se compondrá de otros tantos. Uno de ellos, sin embargo, el debido a $(s/2)\log \pi$, desaparece en los desarrollos matemáticos, quedando solo cuatro.

Presento a continuación la solución a la que llegó Riemann, tras mucho desarrollo, para $J(x)$, y que era el principal resultado de su artículo:

$$\boldsymbol{J(x) = Li(x) - \sum_{\mathrm{Im}[\rho]>0} [Li(x^{\rho}) + Li(x^{1-\rho})] + \int_{t=x}^{\infty} \frac{dt}{t(t^2-1)\log t} + \log \xi(0)}$$

Expresión 16-1