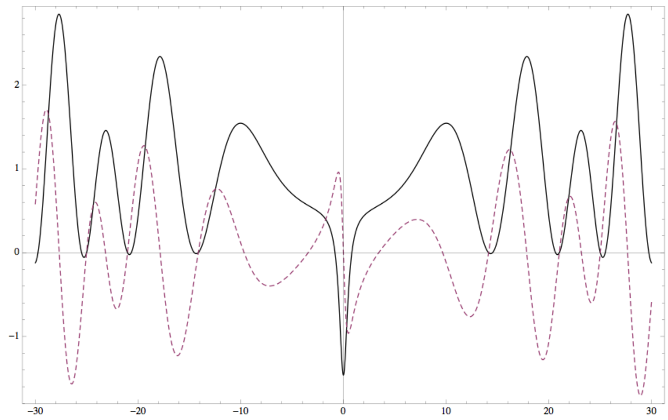

8. El Teorema de los Números Primos.

"La música es el placer que experimenta nuestra mente al contar, sin darse cuenta de que está contando."

Gottfried Leibniz (1646-1716), matemático alemán.

1. **En el capítulo 3 vimos que la frecuencia** con la que van apareciendo números primos entre los naturales va disminuyendo a medida que subimos en nuestra observación. Recordémoslo: entre 1 y 100 existen 25 primos; entre 1 y 1.000 hay 168. ¿Y entre 1 y 10.000? Pues exactamente hay 1.229 números primos. ¿Y entre 1 y 100.000? La respuesta es que hay 9.592 primos. Esta primera ojeada nos hace ver que, aproximadamente, un 25% de los números entre 1 y el 100 son primos, así como que entre 1 y 1.000 lo son un 17%, que entre 1 y 10.000 lo son un 12,3% y que nos encontramos que un 9,6% de los números entre 1 y 100.000 son primos. Es obvio que la cantidad relativa de primos que hay a medida que buscamos más arriba va disminuyendo.

Por otra parte, también vimos en el capítulo 3, porque Euclides lo demostró, que existen infinitos números primos. Euler también lo demostró, y lo vimos también en el capítulo 6, de una forma mucho más elaborada, usando la serie armónica y el producto de Euler. Los primos no tienen fin. Siempre hay más primos. Pero, si existen infinitos primos, ¿cómo están repartidos? Hemos visto que al principio hay bastantes, pero a medida que vamos subiendo parece haber cada vez menos. ¿Esto es siempre así? Y, si es siempre así, ¿sigue esa distribución alguna ley? ¿Somos capaces de conocer esa ley?

Miremos la siguiente tabla 8.1:

Tabla 8.1 – Número de primos como función de N

	N	N	Primos hasta N	Ratio
Diez	10^{1}	10	4	2,5000
Cien	10^{2}	100	25	4,0000
Mil	10^{3}	1000	168	5,9524
Diez mil	10^{4}	10.000	1.229	8,1367
Cien mil	10^{5}	100.000	9.592	10,4254
Un millón	10^{6}	1.000.000	78.498	12,7392
Diez millones	10^{7}	10.000.000	664.579	15,0471
Cien millones	10^{8}	100.000.000	5.761.455	17,3567
Mil millones	10^{9}	1.000.000.000	50.847.534	19,6666
Diez mil millones	10^{10}	10.000.000.000	455.052.511	21,9755
Cien mil millones	10^{11}	100.000.000.000	4.118.054.813	24,2833
Un billón	10^{12}	1.000.000.000.000	37.607.912.018	26,5901
Diez billones	10^{13}	10.000.000.000.000	346.065.536.839	28,8960
Cien billones	10^{14}	100.000.000.000.000	3.204.941.750.802	31,2020
Mil billones	10^{15}	1.000.000.000.000.000	29.844.570.422.669	33,5069
Diez mil billones	10^{16}	10.000.000.000.000.000	279.238.341.033.925	35,8120
Cien mil billones	10^{17}	100.000.000.000.000.000	2.623.557.157.654.233	38,1160
Un trillón	10^{18}	1.000.000.000.000.000.000	24.739.954.287.740.860	40,4204

He escrito en forma de tabla el número de primos que hay hasta un determinado número N, empezando N con 10, siguiendo con 100, 1.000, y así sucesivamente. También he añadido una columna, a la derecha, llamada *Ratio*, en la que está el resultado de dividir el número N entre el número de primos que hay hasta N. Por ejemplo, si $N = 10.000$, y hasta N existen 1.229 números primos, el resultado de la división es $10.000/1.229 = 8{,}1367$. ¿Qué nos dice esta columna? Pues nos da la proporción, o ratio, de números primos que hay desde 2 hasta N. Por ejemplo, hasta 10.000, aproximadamente uno de cada ocho números es primo. Hasta un millón lo es uno de cada trece. Hasta un billón lo es uno de cada 20. Hasta un trillón es primo un número de cada 40. La proporción de primos se va reduciendo. Y se seguirá reduciendo, parece, aunque nunca se hará cero, pues sabemos que hay infinitos números primos. Bien, de momento nos detenemos aquí.

2. La función contadora de números primos $\pi(x)$. En el capítulo 5 vimos qué era una función, y puse varios ejemplos. Una función es una regla que nos asigna a un conjunto de datos, o valores, que llamamos dominio, otro conjunto de resultados, que llamamos imagen. Vimos que una función se puede definir de varias formas: como una tabla, como una expresión matemática, o con una descripción de la misma. Las funciones pueden tener un nombre propio, por ejemplo, la función *velocidad*, como expresión de la distancia recorrida y del tiempo empleado. O, en general, podemos trabajar con funciones abstractas, que no se asocien a una magnitud en particular, a las que llamamos como queramos: f, g, z, u, etc.

Vamos a definir una función muy importante, que a partir de ahora usaremos de manera continua. Es la función que asocia el número de primos que hay hasta una cantidad dada. Es decir, la función que, para cada cantidad que le damos como entrada, nos devuelve el número de primos que hay hasta esa cantidad. A esta función, lamentablemente, se le puso en su día un nombre desafortunado. Fue el matemático Edmund Landau, profesor en Gotinga quien, en 1909, escribió un famoso libro: *Handbuch der lehre von der Verteilung der Primzahlen*[(1)] (Manual sobre la distribución de los números primos). En él, a esta función contadora de números primos, la llamó π. Vaya, qué mala pata. Que ganas de confundir las cosas. Porque, para todo el mundo, π es el valor conocido 3,141592…, que no es más que la razón de la longitud de la circunferencia a su diámetro. Sin embargo este nombre se ha hecho el usual para esta función, y tendremos que acostumbrarnos. Tengamos en cuenta que con frecuencia, en los desarrollos, también aparecerá el número π, y por el contexto podremos distinguir cuándo π lo tenemos interpretar como el famoso número, y cuándo como la función $\pi(x)$, que leeremos así: *pi de x*. ¿Cómo se define la función $\pi(x)$? De la siguiente manera:

$$\pi(x) = \begin{cases} 0, & Si\ x < 2 \\ Numero\ de\ primos\ hasta\ x\ incluido, & Si\ x \geq 2 \end{cases}$$

Veamos algunos valores que toma la función $\pi(x)$ en función del valor x. $\pi(2) = 1,\ \pi(3) = 2,\ \pi(4) = 2,\ \pi(5) = 3,\ \pi(6) = 3,\ \pi(7) = 4,\ \pi(8) = 4,\ \pi(9) = 4,\ \pi(10) = 4,\ \pi(11) = 5.$ La función $\pi(x)$ incrementa su valor en una unidad cada vez que llegamos a un número primo, x. Por ejemplo, $\pi(30) = 10$, y $\pi(31) = 11$. Pero $\pi(32) = 11$ también, y no veremos que la función $\pi(x)$ se incrementa en una unidad hasta que no lleguemos a 37, que es el siguiente primo, por lo que $\pi(37) = 12$.

$\pi(1) = 0$, pues ya vimos en el capítulo 3 que hoy en día los matemáticos no consideran que 1 haya que tomarlo como primo. Cumple las reglas para ser primo, claro, pero su obviedad, y el hecho de que estropea con frecuencia los teoremas y conclusiones, llevó a los matemáticos, ya a final del s. XIX, a no incluirlo como primo. Casi todos los teoremas sobre números primos empiezan de la siguiente manera: *"Sea p un número primo mayor o igual que 2, …."*, por lo que no merece la pena arrastrar el 1 como primo, si no añade nada.

¿Se puede dibujar la función $\pi(x)$? Naturalmente que si. Y, además, da lugar a una gráfica muy bonita. La presento en la figura 8-1, en todo su esplendor. He marcado con una línea de puntos los números primos que hay entre 0 y 50. En cada número primo la función $\pi(x)$ tiene un salto de una unidad. Vemos que la

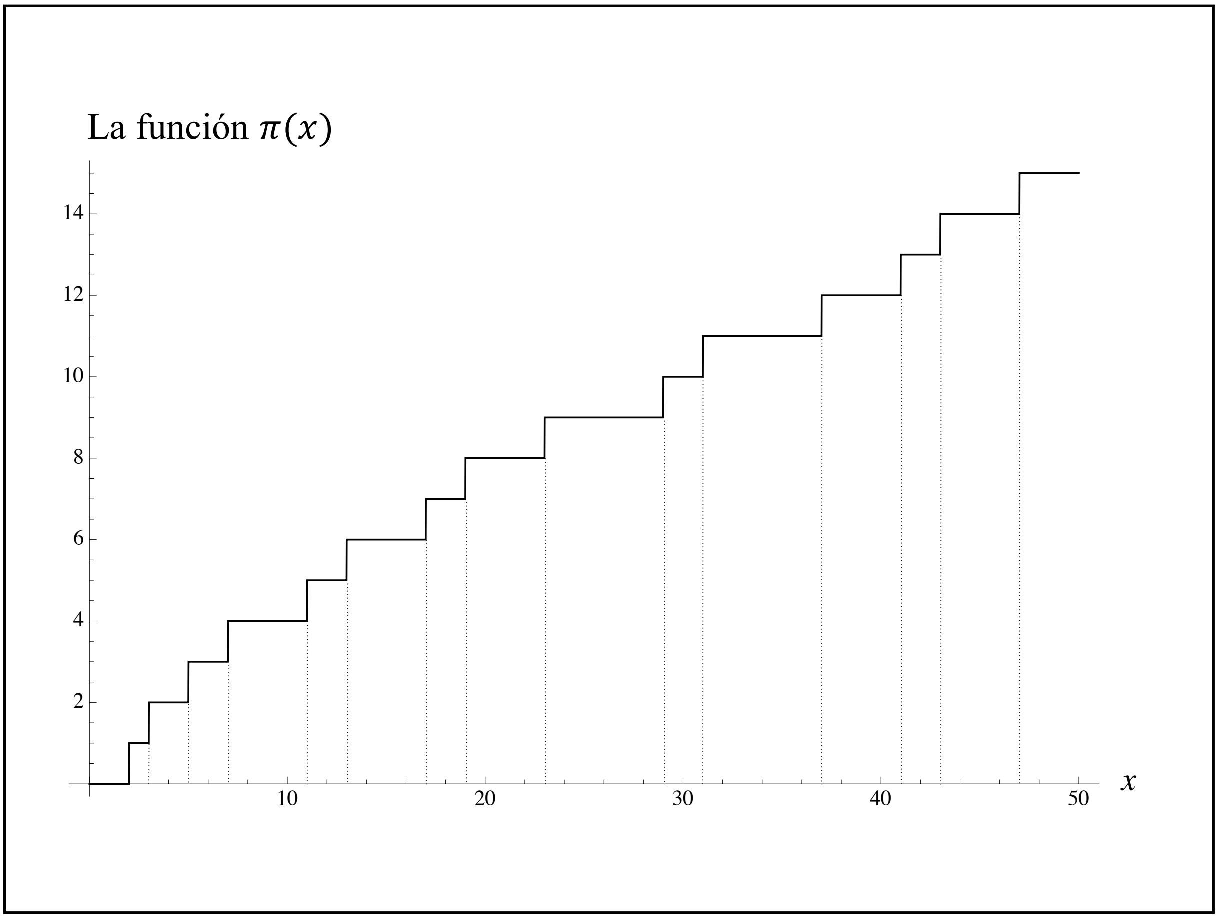

Figura 8-1

función $\pi(x)$ da lugar a una escalera ascendente, apareciendo un nuevo peldaño solamente cuando se llega a un número primo.